

## ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA ESTABILIDAD DE UNA CORRIENTE HÍDRICA LINEALMENTE ESTRATIFICADA

**Pedro A. Basile y Silvia A. Bruno**

Centro Universitario Rosario de Investigaciones Hidroambientales  
FCEIA – Universidad Nacional de Rosario – Argentina

**RESUMEN:** En el presente trabajo se estudia la estabilidad de una corriente hídrica linealmente estratificada, asumiendo que la misma se establece cuando se inclina débilmente un conducto prismático rectangular, cerrado en sus extremidades e infinitamente largo. El estudio se basa en la derivación y posterior resolución numérica de la ecuación de Orr-Sommerfeld extendida al caso de un fluido estratificado. Se presentan las curvas de estabilidad neutra marginal, obtenidas para distintos valores de los números de Reynolds y Richardson. El valor crítico del número de Richardson por encima del cual el flujo es estable para todas las longitudes de onda, que de acuerdo al teorema de J.W. Miles (1961) para el caso de fluido inviscido es igual a 0.25, resulta ser sensiblemente menor debido a los efectos de la viscosidad, inclusive para números de Reynolds moderadamente elevados.

### INTRODUCCIÓN

En ambientes fluviales, marítimos y lagunares es frecuente observar una variación de la densidad a lo largo de la profundidad debido generalmente a una variación de temperatura, de salinidad y/o a la presencia de sedimentos en suspensión con concentraciones elevadas.

El estudio del comportamiento hidrodinámico de tales ambientes reviste una notable importancia en numerosos sectores de la ingeniería y de la geofísica. Entre las situaciones de interés desde el punto de vista ingenieril cabe señalar la dinámica de los estratos superiores de océanos, mares y lagos, inducida por el viento u otras sollicitaciones externas como por ejemplo el campo de presiones o las variaciones térmicas. Asimismo es posible mencionar la formación de corrientes de densidad, debidas a la descarga del agua de enfriamiento proveniente de centrales termoeléctricas en una corriente hídrica con menor temperatura; a la intrusión salina en correspondencia de estuarios o al ingreso de un flujo hídrico cargado de sedimentos en suspensión en embalses y lagos naturales.

La presencia de gradientes de densidad influyen sensiblemente no solo el campo de flujo sino también los procesos de mezcla y dispersión que, como consecuencia de complejos procesos de transporte, se generan en el seno de una determinada corriente hídrica. En particular, el problema de la estabilidad dinámica de un campo de flujo que inicialmente presenta una estratificación estáticamente estable es de gran importancia ya que la intensidad del proceso de mezcla es fuertemente influenciada por la modalidad con que se produce la inestabilidad y la sucesiva transición a la turbulencia (S.A. Thorpe, 1987).

Desde el punto de vista teórico, el estudio de la estabilidad de flujos estratificados puede ser abordado utilizando la metodología de la estabilidad hidrodinámica de corrientes paralelas. El estudio más simple se efectúa considerando el fluido inviscido (preponderan

las fuerzas de inercia y las fuerzas de flotación). Realizando un análisis de estabilidad lineal de las ecuaciones gobernantes se deriva la ecuación de Taylor-Goldstein (1931) y mediante la solución de esta última se determinan las condiciones de estabilidad, como efectuado por P. Hazel, 1972.

Existen en literatura numerosos estudios teóricos (J.W. Miles, 1961; J. Holmboe, 1962; P. Hazel, 1972; G.A. Lawrence et al., 1991) y experimentales (R.S. Scotti et al, 1969; S.A. Thorpe, 1968, 1969 y 1971; C.G. Koop et al. 1979) referidos al caso de un fluido en donde la variación de la densidad se concentra en un estrato de espesor reducido. Por el contrario, las investigaciones referidas a corrientes con estratificación continua lineal o cuasi-lineal de fluidos viscosos resultan ser menos sistemáticas y para nada definitivas.

Por este motivo se ha realizado la presente investigación, analizando numéricamente la estabilidad de un flujo plano paralelo con estratificación continua lineal bajo la hipótesis de fluido viscoso. En este caso el análisis de estabilidad lineal de las ecuaciones gobernantes conduce a la ecuación de Orr-Sommerfeld extendida al caso de un fluido estratificado, la cual ha sido resuelta numéricamente utilizando el método de la completa ortonormalización propuesto por A. Davey, 1973.

## FORMULACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES GOBERNANTES

Consideremos el flujo 2D-V de un fluido newtoniano estratificado para el cual las ecuaciones fundamentales están representadas por las ecuaciones dinámicas, la ecuación de continuidad y la ecuación de incompresibilidad. Las mismas pueden ser escritas en forma adimensional como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) - \tilde{\rho} \frac{\sin \theta}{\text{Fr}^2} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) - \tilde{\rho} \frac{\cos \theta}{\text{Fr}^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $\tilde{\rho}$  es la densidad,  $\tilde{u}$  y  $\tilde{w}$  son las componentes de la velocidad en las direcciones longitudinal  $x$  y vertical  $z$  respectivamente,  $\theta$  es el ángulo que la dirección  $x$  forma con la horizontal,  $\tilde{p}$  es la presión, Re y Fr son el número de Reynolds y el número de Froude respectivamente, definidos como:

$$\text{Re} = \frac{\rho_0^* U_0^* H^*}{\mu} \quad ; \quad \text{Fr} = \frac{U_0^*}{\sqrt{g H^*}}\tag{2}$$

con  $g$ : aceleración de la gravedad,  $\mu$  : viscosidad dinámica,  $U_0^*$ ,  $H^*$  y  $\rho_0^*$ : oportunas velocidad, longitud y densidad de referencia.

Las variables utilizadas en el sistema de ecuaciones (1) fueron adimensionalizadas de la siguiente manera:

$$(x, z) = (x^*, z^*) / H^* \quad ; \quad t = t^* U_0^* / H^*$$

$$(\tilde{u}, \tilde{w}) = (u^*, w^*) / U_0^*$$

$$\tilde{p} = p^* / (\rho_0^* U_0^{*2}) \quad ; \quad \tilde{\rho} = \rho^* / \rho_0^*$$

Es necesario notar además que las ecuaciones dinámicas fueron escritas asumiendo como válida la aproximación de Boussinesq, según la cual las variaciones de densidad intervienen solamente en los términos gravitacionales.

## FLUJO BASE

Adoptamos para el flujo base la condición de régimen permanente y consideramos un conducto prismático de sección rectangular, cerrado en las extremidades e infinitamente largo, el cual contiene un fluido con un gradiente lineal de densidad en la vertical y se inclina un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal. En tal situación, para el flujo base, las ecuaciones (1) se reducen a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \tilde{\rho} \frac{\sin \theta}{Fr^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\tilde{\rho} \frac{\cos \theta}{Fr^2} \quad (4)$$

donde  $U$ ,  $P$  y  $\rho$  son la velocidad, la presión y la densidad del flujo base respectivamente. De la ecuación (4) se deduce la constancia del gradiente de presión en la dirección vertical. Si se especifica la distribución vertical de la densidad, la ecuación (3) puede ser fácilmente integrada respecto a  $z$  dos veces para obtener de esta manera la distribución vertical de velocidades adimensionales del flujo base ( $U=U^*/U_0^*$ ). Asumiendo una distribución de densidad:

$$\rho = 1 - k \beta(z) \quad (5)$$

donde  $k$  es fijado de manera tal que  $\partial \beta(z) / \partial z|_{z=0} = 1$  (P. Hazel, 1972). Para el caso de variación lineal de densidad  $\beta(z)=z$ , se obtiene:

$$\rho = 1 - k z \quad , \quad k = \Delta \rho^* / 2 \rho_0^* \quad (6)$$

donde  $\Delta\rho^*$  es la máxima diferencia de densidad y la densidad de referencia  $\rho_0^*$  es igual a aquella que se verifica en el eje del conducto ( $z=0$ ) de semialtura  $H^*$ . La velocidad de referencia  $U_0^*$  es seleccionada de modo que se satisfaga la siguiente condición:

$$\partial U(z)/\partial z|_{z=0} = 1 \quad (7)$$

Efectuando la integración de la ecuación (3) e imponiendo la condición de velocidad nula en las paredes:

$$U(z)=0 \quad \text{para} \quad z = \pm 1 \quad (8)$$

y que en una genérica sección el flujo neto sea igual a cero:

$$\int_{-1}^1 U(z) dz = 0 \quad (9)$$

se obtiene:

$$U(z) = z(1 - z^2) \quad (10)$$

con la velocidad de referencia, seleccionada en función de la condición (7), igual a:

$$U_0^* = \frac{g H^{*2} k \sin \theta}{6 \nu} \quad (11)$$

donde  $\nu = \mu / \rho_0^*$  es la viscosidad cinemática.

### ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL

El análisis de estabilidad lineal permite determinar las condiciones para las cuales un campo de flujo se inestabiliza cuando es sometido a perturbaciones de pequeña magnitud (en rigor infinitesimales). Superponiendo al flujo base perturbaciones del tipo  $\varepsilon(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{p})$  con  $\varepsilon \ll 1$ , es decir:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= U(z) + \varepsilon \tilde{u}(x, z, t) \\ \tilde{w} &= 0 + \varepsilon \tilde{w}(x, z, t) \\ \tilde{\rho} &= \rho(z) + \varepsilon \tilde{\rho}(x, z, t) \\ \tilde{p} &= P(z) + \varepsilon \tilde{p}(x, z, t) \end{aligned} \quad (12)$$

e incorporando las expresiones (12) en el sistema de ecuaciones (1) se obtiene, después de eliminar los términos cuadráticos de las perturbaciones, el siguiente sistema de ecuaciones linealizadas de las perturbaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \right) - \hat{\rho} \frac{\sin \theta}{Fr^2} \\
\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) - \hat{\rho} \frac{\cos \theta}{Fr^2} \\
\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

El carácter lineal y homogéneo del sistema (13) permite realizar un análisis de estabilidad por modos normales, considerando las siguientes genéricas armónicas de las perturbaciones:

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \hat{u}_0(z) e^{i\alpha(x-ct)} \\
\hat{w} &= \hat{w}_0(z) e^{i\alpha(x-ct)} \\
\hat{\rho} &= \hat{\rho}_0(z) e^{i\alpha(x-ct)} \\
\hat{p} &= \hat{p}_0(z) e^{i\alpha(x-ct)}
\end{aligned} \tag{14}$$

donde  $\alpha$  es el número de onda,  $c$  es la celeridad de fase compleja  $c = c_r + i c_i$ , cuya parte real  $c_r$  representa la velocidad de propagación de la perturbación y la correspondiente parte imaginaria  $c_i$ , multiplicada por  $\alpha$ , representa el coeficiente de amplificación de la perturbación. Este último aumenta, decrece o permanece constante en el tiempo si el valor de  $\alpha c_i$  es mayor (modo inestable), menor (modo asintóticamente estable) o igual (modo estable neutro) que cero respectivamente.

Sustituyendo las expresiones (14) en el sistema (13), operando algebraicamente y asumiendo que  $\theta \ll 1$  (es decir  $\cos \theta = 1$ ,  $\sin \theta = 0$ ), se obtiene:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \phi \left[ \frac{N^2}{(U-c)^2} - \alpha^2 - \frac{d^2 U / dz^2}{(U-c)} \right] = \frac{1}{i\alpha \text{Re}(U-c)} \left( \frac{d^4 \phi}{dz^4} + 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \alpha^4 \phi \right) \tag{15}$$

donde  $\phi = \hat{w}_0(z)$  y  $N$  es la frecuencia de Brunt-Väisälä o frecuencia de las fuerzas de flotación (buoyancy):

$$N^2 = J \frac{\partial \beta}{\partial z} \tag{16}$$

con  $J$  igual al número de Richardson del gradiente  $Ri(z)$  evaluado en  $z=0$ :

$$J = Ri(z=0) = -\frac{1}{\rho Fr^2} \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \Big|_{z=0} = \frac{k}{Fr^2} \tag{17}$$

La expresión (15) es la ecuación de Orr-Sommerfeld válida para un fluido viscoso, extendida al caso de un flujo estratificado. Para  $Re \rightarrow \infty$  el segundo miembro de la (15) tiende a cero, obteniéndose la ecuación de Taylor-Goldstein válida para fluido inviscido.

La ecuación (15) junto con las condiciones al contorno:

$$\phi = 0, \quad \frac{d\phi}{dz} = 0 \quad \text{para} \quad z = \pm 1 \quad (18)$$

conduce a una relación de autovalores de la forma:

$$F(\alpha, c, J, Re) = 0 \quad (19)$$

la cual ha sido resuelta numéricamente utilizando el método de la ortonormalización completa propuesto por A. Davey, 1973.

## PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La relación de autovalores (19) permite construir, para diferentes valores del número de Reynolds y fijado  $J$ , las curvas  $\alpha - c_i$ , dominio de los autovalores de la ecuación de Orr-Sommerfeld. En la Figura 1 se presenta un ejemplo de tales curvas para  $Re=1000$ . Se observa que existe un valor límite de  $J$ , y por lo tanto del gradiente de densidad, por encima del cual el problema a los autovalores no admite solución para valores positivos de  $c_i$ . En estas condiciones el flujo es siempre estable respecto a pequeñas perturbaciones.

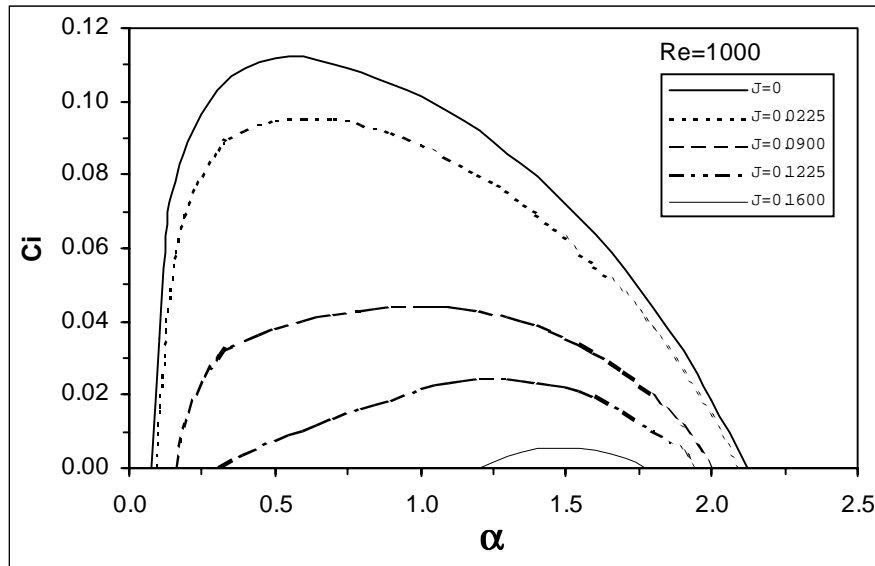


Figura 1: parte imaginaria de la celeridad de fase  $c_i$  en función de  $\alpha$  para  $Re=1000$  y distintos valores del número de Richardson  $J$ .

La evaluación del coeficiente de amplificación permite además construir las curvas de estabilidad neutra marginal, es decir aquellas curvas a lo largo de las cuales  $c_i = 0$  que determinan la frontera de la zona donde  $c_i > 0$  y el flujo es inestable. En la Figura 2 se presenta una curva de estabilidad neutra marginal para  $Re=10000$ . En la misma se exponen además los valores máximos del coeficiente de amplificación  $\alpha c_i$  en función de  $J$ , se observa que dichos valores, conjuntamente con las longitudes de ondas más inestables, aumentan a medida que  $J$  disminuye.

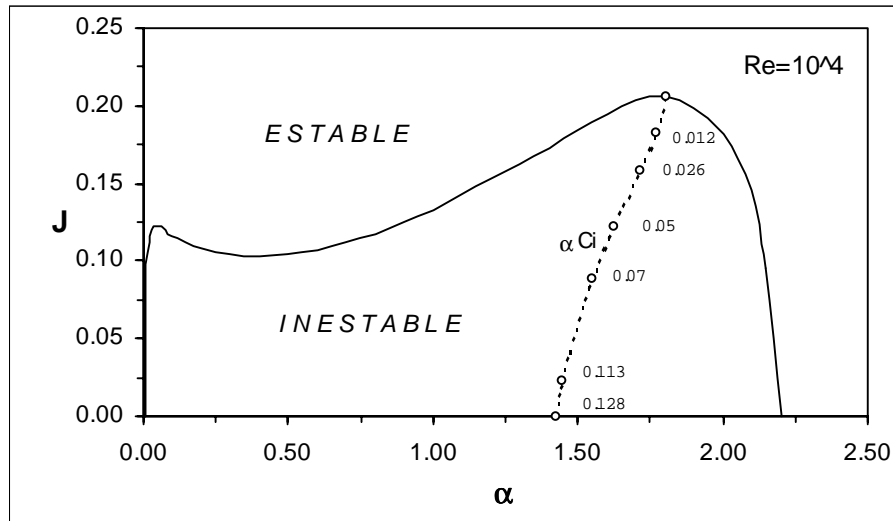


Figura 2: curva de estabilidad neutra marginal para  $Re=10000$  y máxima celeridad de amplificación de las perturbaciones.

En la Figura 3 se muestran las curvas de estabilidad neutra marginal para distintos valores del número de Reynolds. A medida que aumenta el número de Reynolds, las curvas de estabilidad neutra marginal tienden progresivamente a concordar con la correspondiente curva que se obtiene resolviendo la ecuación de Taylor-Goldstein, válida para fluido inviscido estratificado ( $Re=\infty$ ). Se observa claramente la influencia estabilizadora que ejerce la viscosidad en las perturbaciones de pequeña longitud de onda  $\lambda = 2\pi / \alpha$ . En efecto, el valor crítico del número de Richardson  $J$  por encima del cual el flujo es estable para todas las longitudes de onda, que de acuerdo al teorema de J.W. Miles (1961) en el caso de fluido inviscido es igual a 0.25, resulta ser sensiblemente reducido. Por el contrario se observa además el efecto desestabilizador inducido por la viscosidad en las longitudes de onda mayores. En particular, para valores moderadamente elevados de  $Re$ , se observa una inestabilidad de origen viscoso que produce un máximo relativo de la curva  $\alpha - J$  en un entorno de  $\alpha = 0$ .

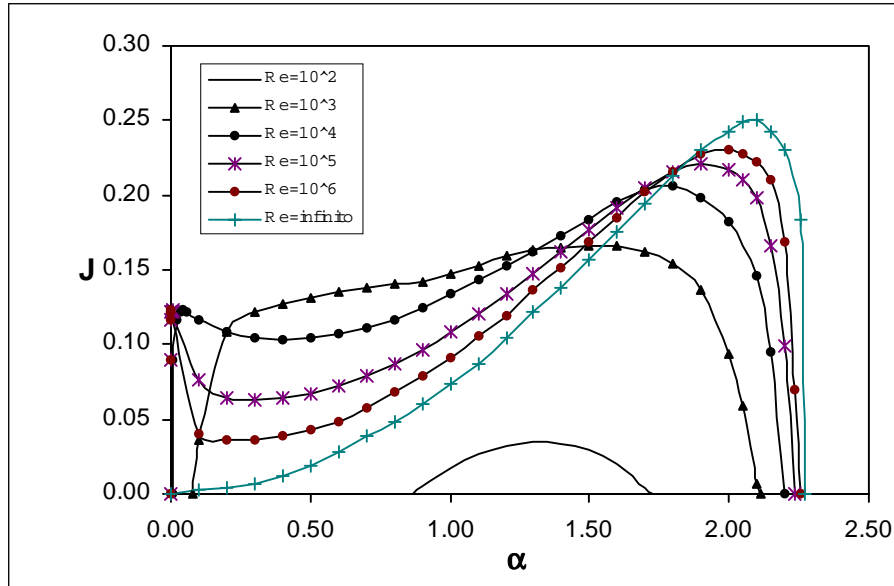


Figura 3: curvas de estabilidad neutra marginal para distintos valores del número de Reynolds  $Re$ .

El intervalo de las longitudes de onda desestabilizadas por la influencia de la viscosidad disminuye a medida que aumenta  $Re$ , permaneciendo por otra parte constante el valor máximo relativo de  $J$  por debajo del cual se observa inestabilidad. Esto se evidencia claramente en la Figura 4 donde se representa el número de onda  $\alpha$  multiplicado por  $Re$  en escala logarítmica. La inestabilidad de origen viscoso es controlada por un valor crítico del número de Richardson igual aproximadamente a  $J = 0.1235$ .

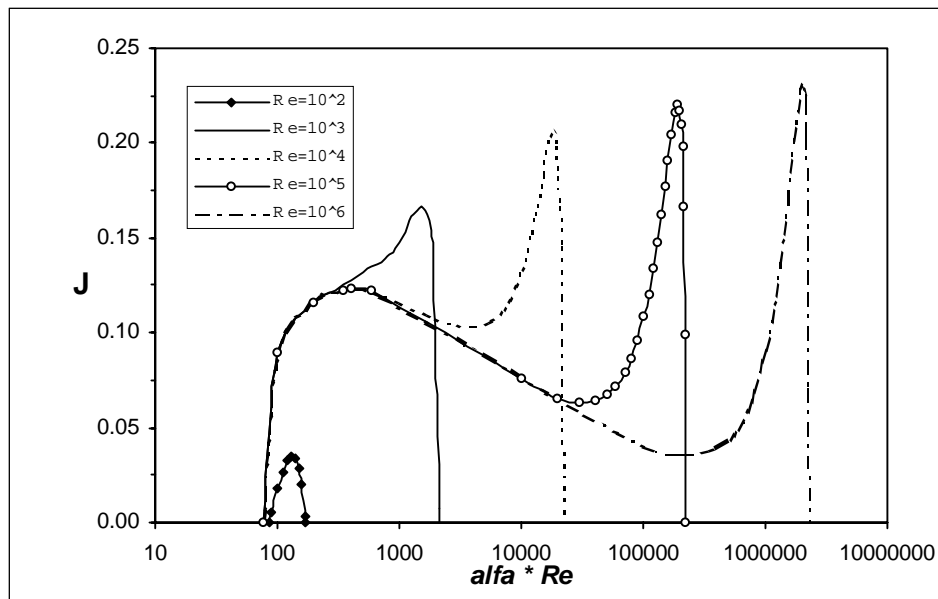


Figura 4: curvas de estabilidad neutra marginal para distintos valores del número de Reynolds  $Re$



En la Figura 5 se presentan los valores máximos de los coeficientes de amplificación de las perturbaciones en función del número de Richardson, para diferentes valores del número de Reynolds. Se observa que para  $Re=100000$  las velocidades de amplificación no difieren sustancialmente de aquellas correspondientes a la solución la ecuación de Taylor-Goldstein.

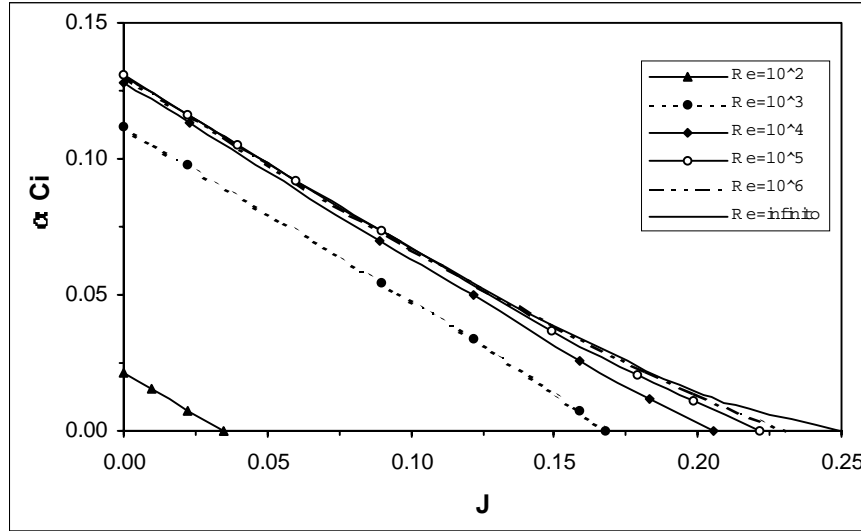


Figura 5: celeridad de amplificación de las perturbaciones en función del número de Richardson y del número de Reynolds.

## CONCLUSIONES

La investigación efectuada ha permitido determinar la influencia ejercida por la viscosidad en la estabilidad de una corriente hídrica linealmente estratificada. Los resultados obtenidos mediante la resolución numérica de la ecuación de Orr-Sommerfeld, extendida a un fluido estratificado, han sido además comparados con aquellos que se obtienen a través de la resolución de la ecuación de Taylor-Goldstein.

Se ha evidenciado el efecto estabilizador que induce la viscosidad en las perturbaciones de pequeña longitud de onda. Dichos efectos son más importantes a medida que disminuye el número de Reynolds. Asimismo, se ha observado el efecto desestabilizador que la misma ejerce en las perturbaciones que presentan mayores longitudes de onda.

Se ha determinado además una inestabilidad de origen viscoso. La misma se observa para pequeños números de onda (entorno de  $\alpha=0$ ) y números de Reynolds moderadamente elevados. Dicha inestabilidad es controlada por un valor crítico del número de Richardson  $J = 0.1235$  aproximadamente. Sin embargo, dado los valores reducidos de  $\alpha$ , los valores que asume el coeficiente de amplificación de las perturbaciones son significativamente reducidos.

Si se consideran las perturbaciones caracterizadas por las máximas velocidades de amplificación, el efecto de la viscosidad determina una disminución del valor crítico del número de Richardson y un incremento de la correspondiente longitud de onda.

## BIBLIOGRAFÍA

**Chia-Sun Yih; 1980.** *Stratified Fluids*. Academic Press London, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. 418 p.

**Davey, A.; 1973.** *A simple numerical method for solving Orr-Sommerfeld problems*. Quart. Journ. Appl. Math. XXVI, pp. 401-411.

**Drazin, P.G. y Reid, W.H.; 1979.** *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press. 525 p.

**Hazel, P.; 1972.** *Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows*. Journ. Fluid Mechanics. 51, pp. 39-61.

**Holmboe, J.; 1962.** *On the behaviour of symmetric waves in stratified shear layers*. Geophys. Publ. 24, p. 67.

**Howard, L.N.; 1961.** *Note on the paper of John Miles*. Journ. Fluid Mechanics. 10, pp. 509-512.

**Koop, C.G. y Browand, F.K.; 1979.** *Instability and turbulence in a stratified fluid with shear*. Journ. Fluid Mechanics. 93, pp. 135-159.

**Lawrence, G.A.; Browand, F.K. y Redekoop, L.G.; 1991.** *The stability of a sheared density interface*. Phys. of Fluids A3 (10), pp. 2360-2370.

**Miles, J.W.; 1961.** *On the stability of heterogeneous shear flows*. Journ. Fluid Mechanics. 10, pp. 496-508.

**Scotti, R.S. y Corcos, G.M.; 1972.** *An experiment on the stability of small disturbances in a stratified free shear flow*. Journ. Fluid Mechanics. 52, pp. 499-528.

**Thorpe, S.A.; 1968.** *A method of producing shear flow in a stratified fluid*. Journ. Fluid Mechanics. 32, pp. 693-704.

**Thorpe, S.A.; 1969.** *Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids*. Journ. Fluid Mechanics. 39, pp. 25-48.

**Thorpe, S.A.; 1971.** *Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids*. Journ. Fluid Mechanics. 46, pp. 299-319.

**Thorpe, S.A.; 1987.** *Transitional phenomena and development of turbulence in stratified fluids: a review*. Journ. Geophys. Research. 92, pp. 5231-5248.

**Turner, J.S.; 1973.** *Buoyancy effects in Fluids*. Cambridge University Press. 367 p.